チェビシェフの多項式　周辺

2009 年三重大・2008 年埼玉・2007 年横浜市立と，このチェビシェフの多項式に関する問題が毎年どこかの大学で出題されているので，ネットで調べてみました。すると，これがまた花盛りですね。チェビシェフの不等式というのは有名ですけどねえ。

さて，これを Maxima を使いながら調べてみますか。まず,

1996 年 京大理 n は自然数とする。

(1)　すべての実数 θ に対し $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$，$\sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$ を満たし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

(2)　$f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ。

(3)　p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ。

入試では「n は自然数とする。」という語句は,「(いざとなったら) 数学的帰納法を使えよ」という指示にほかならない。

加法定理より $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$ なので

$f_{n+1} = xf_n - (1-x^2)g_n \cdots ①, g_{n+1} = xg_n + f_n \cdots ②, f_1 = x, g_1 = 1$

関数漸化式。(1) はこれで帰納法を使ってできる。

連立漸化式なので， ② より $f_n = g_{n+1} - xg_n$ として ① へ代入すると $g_{n+2} = 2xg_{n+1} - g_n \cdots ④$

① より $(1-x^2)g_n = xf_n - f_{n+1}$ として $(1-x^2)\times$② へ代入すると $f_{n+2} = 2xf_{n+1} - f_n \cdots ③$

$f_1 = x, f_2 = 2x^2-1, g_1 = 1, g_2 = 4x$ 別々の漸化式となった。(初期値が違うだけの同じ漸化式だ)

(2) はこれを使ってもできるが，数 III をやっていれば $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ の両辺を微分して

$-n\sin n\theta = -\sin\theta f'_(\cos\theta)$ からも出る。

(3) p は 3 以上の素数なので，$f_p\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(p\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ より，f_p の定数項は 0。後は (2) を使えば示せる。

というわけで，この問題はそう難しくありませんが，この関数の性質に関する問題，三角関数から作られた関数なのでその三角関数の性質を使った問題と入試には色々な問題が表われています。

Maxima で見ましょう。① ② の漸化式で，まず　f_n, g_n を一気に求め，③ の漸化式で f_n だけ求めましょう。

```
A:matrix([x,x^2-1],[1,x])$a:matrix([x],[1])$
for i:1 thru 5 do print(expand(A^^i.a));
```

$$\begin{pmatrix}2x^2-1\\2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^3-3x\\4x^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8x^4-8x^2+1\\8x^3-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16x^5-20x^3+5x\\16x^4-12x^2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32x^6-48x^4+18x^2-1\\32x^5-32x^3+6x\end{pmatrix}$$

```
B:matrix([2*x,-1],[1,0])$b:matrix([2*x^2-1],[x])$
for i:1 thru 5 do print(expand(B^^i.b));
```

$$\begin{pmatrix}4x^3-3x\\2x^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8x^4-8x^2+1\\4x^3-3x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16x^5-20x^3+5x\\8x^4-8x^2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32x^6-48x^4+18x^2-1\\16x^5-20x^3+5x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}64x^7-112x^5+56x^3-7x\\32x^6-48x^4+18x^2-1\end{pmatrix}$$

さらに，帰納的定義を使って f_n を求め，グラフも見てみます。

```
ff(i):=block(
if i=1 then return(s1)
else if i=2 then return(s2)
else return(expand(2*x*ff(i-1)-ff(i-2)))
)$
s1:x$s2:2*x^2-1$
for i:1 thru 5 do print(ff(i));
```

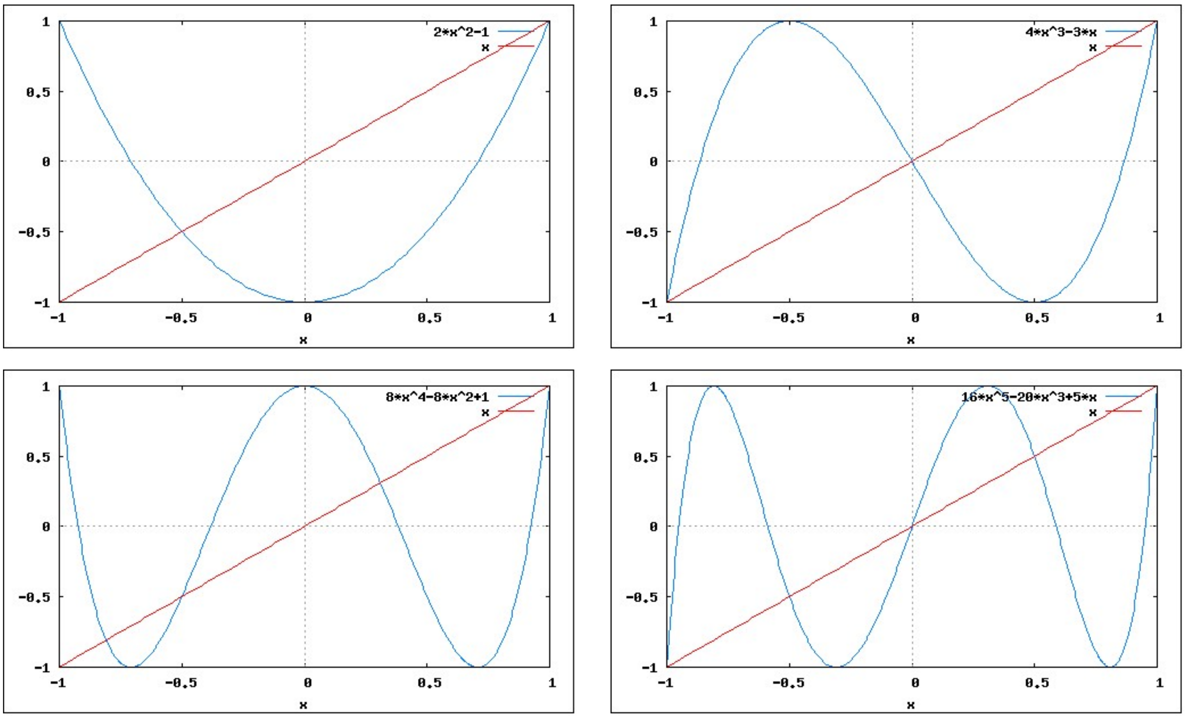
x

$2x^2-1$

$4x^3-3x$

$8x^4-8x^2+1$

$16x^5-20x^3+5x$



それぞれの x 軸との交点が，$\cos n\theta=0$ の解。 k を整数として，$n\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ つまり $\theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ の余弦が交点の x 座標となる。

例えば，$n=4$ とすると $\theta=\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8}$ に対応する 4 点となるわけです。

また，赤い直線　$y=x$ との交点が，2,3,4,5 個と増えています。

$\cos n\theta=\cos\theta$ の解です。

$n\theta=\pm\theta+2k\pi$ つまり $\theta=\dfrac{2k\pi}{n-1},\dfrac{2k\pi}{n+1}$ の余弦が交点の x 座標となる。

例えば，$n=4$ とすると $\theta=0,\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{2\pi}{3}$ に対応する 4 点となるわけです。

$\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{8}$ の値を $8x^4-8x^2+1=0$ の解の積だから $\dfrac{1}{8}$ と求める，とか，実際に 8 次方程式を解かせたり，なんてのが問題に出ています。