分母の有理化

中学生は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **（タイプ１）** の形，高校生は $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **（タイプ２）** の形の分母の有理化をやる。
まあ，後はパズルのようなものがあるのみ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}$

（タイプ３） 分母が 3 項以内だと，分母の有理化を a^2-b^2 の公式で何回かやると可能。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-\sqrt{5}^2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{12}$
$=\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{12}$

特に，$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$ のようだと楽。

（タイプ４） 分母が 4 項以上だと，a^2-b^2 の公式ではできるとは限らないが,

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{7+2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

あるいは，$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$

これは，$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ の $ab=cd$ の場合。

（タイプ４’） 次に (3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}-2\sqrt{10}}$
$=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{10})(2+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2\cdot 2}=\dfrac{-\sqrt{50}+\sqrt{30}-\sqrt{20}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}+6}{4}$

これは，$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ の $a+b=c+d$ の場合。

（タイプ５） (4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}+\sqrt[3]{9}\sqrt{5}}$

ここからはなかなか。(4) はネットでみかけた難問。符合が違えば楽なのに。ネットの解法は $\sqrt[3]{2}=x$ とおいて x の多項式でユークリッドの互除法を使う難しさ。(5) もネットで見かけた京大の講義の練習問題なんだって。

さて，これを解くまえに前のタイプの問題を違う方法で解いてみる。

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(a\sqrt{6}+b\sqrt{3}+c\sqrt{2}+1)=\sqrt{6}(c+b+a)+\sqrt{2}(c+3a+1)+\sqrt{3}(b+2a+1)+2c+3b+1$

これで，$a+b+c=0, 3a+c+1=0, 2a+b+1=0$ を解くと，$a=-\dfrac{1}{2}, b=0, c=\dfrac{1}{2}$

つまり，$(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2)=4$ だから

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{4}$

$\sqrt{2},\sqrt{3}$ を有理数の体に加えて新しい体を作ると $\sqrt{2},\sqrt{3}.\sqrt{6}$ の体となる。つまり割り算しても，必ずこの 3 要素を使った数となるという理論を使ったことになる。

(4) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1)(a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+1)=(-a+b+1)\sqrt[3]{2}+(2a-b+1)\sqrt[3]{2}+2a+2b-1$ として，
$-a+b+1=0, 2a-b+1=0$ を解くと，$a=-2, b=-3$ なので

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1}{11}$

(5) も同様にして（もちろん Maxima を使いましたが），

$\left(3^{\frac{2}{3}}\sqrt{5}+\sqrt{5}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(50\,3^{\frac{2}{3}}\sqrt{5}-177\,3^{\frac{1}{3}}\sqrt{5}-31\sqrt{5}+42\,3^{\frac{2}{3}}-95\,3^{\frac{1}{3}}+135\right)=-2864$